

乾湿球温湿度計での湿度の求め方

2023年3月8日 椿 耕太郎

湿度を測る方法の一つとして乾湿球温湿度計がある。温度計を二本並べて設置し、一つはそのまま気温を測り（乾球温度計）、もう一つは感温部を濡れたガーゼなどで包み温度を測る（湿球温度計）。この二つの温度計の示す温度により相対湿度と絶対湿度を求めることができる。湿球温度計の値は同じ気温でも湿度により値が異なる。湿球温度計の周りに巻いたガーゼの水は蒸発する際に蒸発熱を周りの水から奪う。湿度が低い空気では蒸発量が多いため、温度の低下が大きく、湿球温度と乾球温度の差は大きくなる。相対湿度 100%である飽和状態の空気ではガーゼの水は蒸発しないため乾球温度と湿球温度の値は等しくなる。

乾湿球温湿度計での湿度の求め方を見ていく。乾湿球温湿度計で測っているのは気温（乾球温度）と湿球温度の二つである。この二つの温度から相対湿度と絶対湿度を求める方法を記した。特に湿球温度の意味がわかりにくいため、多めに説明している。

1 湿度

1.1 相対湿度と絶対湿度の定義

まず、湿度の定義を確認する。湿度は空気中に含まれる水蒸気の割合であり、日常的に使われる相対湿度 φ [%] と絶対湿度 x [kg/kg] がある。

相対湿度 φ [%] は、空気中の水蒸気の実数 $n_{\text{水蒸気}}$ と同じ温度の飽和空気の水蒸気の実数 $n_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ の比で定義され、ドルトンの法則より水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気}}$ [Pa] と飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ [Pa] によっても表すことができる。

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{100} &= \frac{n_{\text{水蒸気}}}{n_{\text{水蒸気 (飽和)}}} \\ &= \frac{P_{\text{水蒸気}}}{P_{\text{水蒸気 (飽和)}}}\end{aligned}\quad (1)$$

絶対湿度 x [kg/kg] は水蒸気の実数 $m_{\text{水蒸気}}$ [kg] と乾燥空気の実数 $m_{\text{乾空}}$ [kg] の割合（単位質量の乾燥空気中に含まれる水蒸気の実数）で定義される。また、質量を分子量 M [kg/kmol] と実数 n [kmol] で表し、モル比をドルトンの法則より大気の実数 $P_{\text{大気}}$ [Pa] と空気中の水蒸気の実数 $P_{\text{水蒸気}}$ [Pa] の比を用いて表すことで水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ [Pa] のみで表すこともできる。

$$\begin{aligned}x &= \frac{m_{\text{水蒸気}}}{m_{\text{乾空}}} \\ &= \frac{M_{\text{水}} n_{\text{水蒸気}}}{M_{\text{乾空}} n_{\text{乾空}}}\end{aligned}\quad (2)$$

$$= \frac{M_{\text{水}}}{M_{\text{乾空}}} \frac{P_{\text{水蒸気}}}{(P_{\text{大気圧}} - P_{\text{水蒸気}})}$$

水の分子量 $M_{\text{水}} = 18.01528$ kg/kmol、乾燥空気平均分子量 $M_{\text{乾空}} = 28.9645$ kg/kmol、標準気圧 $P_{\text{大気圧}} = 101325$ Pa[1] を代入

$$= 0.622 \frac{P_{\text{水蒸気}}}{101325 \text{ Pa} - P_{\text{水蒸気}}} \quad (3)$$

1.2 相対湿度と絶対湿度の関係

式 (1) を変形をして次式を得る。

$$P_{\text{水蒸気}} = \frac{\varphi}{100} P_{\text{水蒸気 (飽和)}} \quad (4)$$

式 (3) に式 (4) を代入し、次式の絶対湿度 x [kg/kg] と飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ [Pa]、相対湿度 φ [%] の関係を得る。

$$x = 0.622 \frac{(\varphi/100) P_{\text{水蒸気 (飽和)}}}{101325 \text{ Pa} - (\varphi/100) P_{\text{水蒸気 (飽和)}}} \quad (5)$$

上式を変形することで相対湿度 φ を次式のように表すことができる。

$$\frac{\varphi}{100} = \frac{101325 \text{ Pa } x}{P_{\text{水蒸気 (飽和)}} (x + 0.622)} \quad (6)$$

1.3 飽和空気の水蒸気分圧

相対湿度の定義にも使われる飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ は温度によって決まる値である。飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ は同じ温度の水（蒸気）の飽和圧力（飽和蒸気圧）から求めることができる。飽和蒸気圧 $P_{\text{飽和蒸気}}$ [Pa] と絶対温度で表された水の温度 θ [K] の関係の近似式を表す [1][2]。

$$P_{\text{飽和蒸気}} = \exp\{-0.58002206 \times 10^4 (\theta/\text{K})^{-1} + 0.13914993 \times 10 - 0.48640239 \times 10^{-1} \theta/\text{K} \\ + 0.41764768 \times 10^{-4} (\theta/\text{K})^2 - 0.14452093 \times 10^{-7} (\theta/\text{K})^3 + 0.65459673 \times 10 \log_e (\theta/\text{K})\} \text{ Pa} \quad (7)$$

飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ は飽和蒸気圧 $P_{\text{飽和蒸気}}$ と補正係数 f で次式のように表される。

$$P_{\text{水蒸気 (飽和)}} = f P_{\text{飽和蒸気}} \quad (8)$$

補正係数 f は温度で異なり、大気圧下の値は次式で表される [1][2]。

$$f = 1.004 + (0.0008 T/^{\circ}\text{C} - 0.004)^2 \quad (9)$$

式 (8) に式 (7)、式 (9) を代入する。その際、絶対温度 θ/K を摂氏温度 $(T/^{\circ}\text{C} + 273.15)$ で置き換える。温度の関数として飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}$ [Pa] を次式のように求めることができる。

$$P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T) = \{1.004 + (0.0008 T/^{\circ}\text{C} - 0.004)^2\} \{\exp(-0.58002206 \times 10^4 (T/^{\circ}\text{C} + 273.15)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.13914993 \times 10 - 0.48640239 \times 10^{-1}(T/^{\circ}\text{C} + 273.15) \\
& + 0.41764768 \times 10^{-4}(T/^{\circ}\text{C} + 273.15)^2 - 0.14452093 \times 10^{-7}(T/^{\circ}\text{C} + 273.15)^3 \\
& + 0.65459673 \times 10 \log_e(T/^{\circ}\text{C} + 273.15))\} \tag{10}
\end{aligned}$$

2 湿球温度と湿度

湿球温度の意味は非常にわかりにくい。湿球温度は風速が3~5 m/s 以上になるように作られた通風乾湿球温度計では断熱飽和温度とほぼ等しくなる。この断熱飽和温度についてみていく。

2.1 断熱飽和温度

断熱飽和温度は断熱された十分に長い水の入った流路（図1）の温度である [3]。十分に長い水の入った流路の片側から空気を流す。流路の中で水は蒸発し、空気の湿度は下流側に流れるに従い高くなる。水が蒸発する際に蒸発熱を奪うため、空気と水の温度が下がる。流路は出口において空気に対して水がそれ以上蒸発できない相対湿度が100%になるほどに十分長い。蒸発した量と同じだけ水は供給されるとして、長い間空気を流し続ければ、水の温度と空気の出口の温度は同じ温度となり変化しなくなる。この出口空気温度と水の温度は、蒸発熱により入口の空気よりも低い温度となる。この温度が変化しなくなった定常状態での出口空気温度が断熱飽和温度であり、湿球温度にあたる。

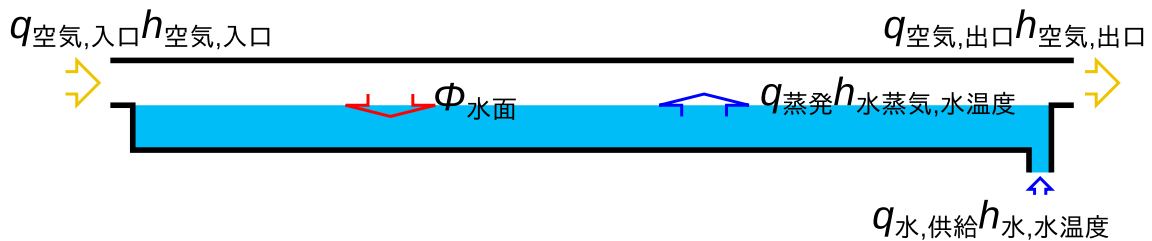


図1 断熱飽和温度の仮定

まとめると条件として次のような仮定がおかれている。

1. 定常状態（時間変化しない）
2. 出口での空気は飽和状態（湿度100%）
3. 出口の空気の温度と水の温度は等しい
4. 水は蒸発した分だけ供給される

この条件から出口での断熱飽和温度（湿球温度）の関係を求めるために、空気側と水側のエネルギーの保存式をそれぞれ立てる。空気側は入口と出口でのエネルギーの流出入を空気の質量流量 $q_{\text{空気}}$ [kg/s] と空気の比エンタ

ルピー $h_{\text{空気}}$ [J/kg] の積で、入口から出口までの空気から水への伝熱量を $\Phi_{\text{水面}}$ [J/s] で、水面からの水蒸気の流入のエネルギーを蒸発する水蒸気の質量流量 $q_{\text{蒸発}}$ [kg/s] と水蒸気の比エンタルピー $h_{\text{水蒸気, 水温度}}$ [J/kg] の積で求め次式となる。

$$0 = q_{\text{空気, 入口}} h_{\text{空気, 入口}} - q_{\text{空気, 出口}} h_{\text{空気, 出口}} - \Phi_{\text{水面}} + q_{\text{蒸発}} h_{\text{水蒸気, 水温度}} \quad (11)$$

水側は空気との伝熱、空気側への水蒸気の流出、水の供給による流入のエネルギーで次式となる。

$$0 = \Phi_{\text{水面}} - q_{\text{蒸発}} h_{\text{水蒸気, 水温度}} + q_{\text{水, 供給}} h_{\text{水, 水温度}} \quad (12)$$

上式において水と水蒸気のエンタルピー差 $h_{\text{水蒸気, 水温度}} - h_{\text{水, 水温度}}$ は水の蒸発潜熱 $h_{\text{蒸発}}$ であり、条件 4 から $q_{\text{蒸発}} = q_{\text{水, 供給}}$ であるので水と空気の伝熱と水の蒸発潜熱が等しくなっている ($\Phi_{\text{水面}} = q_{\text{蒸発}} h_{\text{蒸発}}$) ことがわかる。式 (11) と式 (12) を足し合わせると次式のように全体のエネルギーの保存式となる。このエネルギーの保存式を変形して出口での断熱飽和温度（湿球温度）と湿度との関係を求める。

$$0 = q_{\text{空気, 入口}} h_{\text{空気, 入口}} - q_{\text{空気, 出口}} h_{\text{空気, 出口}} + q_{\text{水, 供給}} h_{\text{水, 水温度}}$$

空気の流入するエンタルピーは乾燥空気と水蒸気のエンタルピーの和と等しい $q_{\text{空気}} h_{\text{空気}} = q_{\text{乾空}} h_{\text{乾空}} + q_{\text{水蒸気}} h_{\text{水蒸気}}$

また、水蒸気の質量流量は乾燥空気の質量流量と絶対湿度の積 $q_{\text{水蒸気}} = q_{\text{乾空}} x$ である

$$0 = (q_{\text{乾空, 入口}} h_{\text{乾空, 入口}} + q_{\text{乾空, 入口}} h_{\text{水蒸気, 入口}} x_{\text{入口}}) - (q_{\text{乾空, 出口}} h_{\text{乾空, 出口}} + q_{\text{乾空, 出口}} h_{\text{水蒸気, 出口}} x_{\text{出口}}) + q_{\text{水, 供給}} h_{\text{水, 水温度}}$$

乾燥空気は途中で出入がないため質量流量は入口と出口で等しいのでとも $q_{\text{乾空}}$ で表す

$$0 = q_{\text{乾空}} h_{\text{乾空, 入口}} + q_{\text{乾空}} h_{\text{水蒸気, 入口}} x_{\text{入口}} - q_{\text{乾空}} h_{\text{乾空, 出口}} - q_{\text{乾空}} h_{\text{水蒸気, 出口}} x_{\text{出口}} + q_{\text{水, 供給}} h_{\text{水, 水温度}}$$

水の供給流量は出入口の水蒸気の質量流量の差と等しい $q_{\text{水, 供給}} = q_{\text{水蒸気, 出口}} - q_{\text{水蒸気, 入口}} = q_{\text{乾空}} (x_{\text{出口}} - x_{\text{入口}})$

$$0 = q_{\text{乾空}} h_{\text{乾空, 入口}} + q_{\text{乾空}} h_{\text{水蒸気, 入口}} x_{\text{入口}} - q_{\text{乾空}} h_{\text{乾空, 出口}} - q_{\text{乾空}} h_{\text{水蒸気, 出口}} x_{\text{出口}} + q_{\text{乾空}} (x_{\text{出口}} - x_{\text{入口}}) h_{\text{水, 水温度}}$$

$q_{\text{乾空}}$ で式全体を割る

$$0 = h_{\text{乾空, 入口}} + h_{\text{水蒸気, 入口}} x_{\text{入口}} - h_{\text{乾空, 出口}} - h_{\text{水蒸気, 出口}} x_{\text{出口}} + (x_{\text{出口}} - x_{\text{入口}}) h_{\text{水, 水温度}}$$

水の温度 $T_{\text{水}}$ は空気の出口温度 $T_{\text{出口}}$ と等しい (条件 3)

$$0 = h_{\text{乾空, 入口}} - h_{\text{乾空, 出口}} + (h_{\text{水蒸気, 入口}} - h_{\text{水, 出口}}) x_{\text{入口}} - (h_{\text{水蒸気, 出口}} - h_{\text{水, 出口}}) x_{\text{出口}}$$

乾燥空気のエンタルピー差は乾燥空気の等圧比熱 $c_{p, \text{乾空}}$ かける温度差で表される

$$0 = c_{p, \text{乾空}} (T_{\text{入口}} - T_{\text{出口}}) + (h_{\text{水蒸気, 入口}} - h_{\text{水, 出口}}) x_{\text{入口}} - (h_{\text{水蒸気, 出口}} - h_{\text{水, 出口}}) x_{\text{出口}}$$

$$x_{\text{入口}} = \frac{c_{p, \text{乾空}} (T_{\text{入口}} - T_{\text{出口}}) - (h_{\text{水蒸気, 出口}} - h_{\text{水, 出口}}) x_{\text{出口}}}{h_{\text{水蒸気, 入口}} - h_{\text{水, 出口}}}$$

乾き空気の定圧比熱 $c_{p, \text{乾空}}$ には 1006 J/(kg K) を、水蒸気のエンタルピーは $(1.845 \times T/^\circ\text{C} + 2501)$ kJ/kg、水のエンタルピーは $4.197 \times T/^\circ\text{C}$ kJ/kg で近似される (CoolProp[4] のデータより)

$$x_{\text{入口}} = \frac{1.006 \text{ kJ}/(\text{kg K})(T_{\text{入口}} - T_{\text{出口}}) - (1.845 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{出口}}/^\circ\text{C} + 2501 \text{ kJ}/\text{kg} - 4.197 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{出口}}/^\circ\text{C}) x_{\text{出口}}}{1.845 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{入口}}/^\circ\text{C} + 2501 \text{ kJ}/\text{kg} - 4.197 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{出口}}/^\circ\text{C}}$$

$$x_{\text{入口}} = \frac{1.006 \text{ kJ}/(\text{kg K})(T_{\text{入口}} - T_{\text{出口}}) - (2501 \text{ kJ}/\text{kg} - 2.352 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{出口}}/^\circ\text{C}) x_{\text{出口}}}{1.845 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{入口}}/^\circ\text{C} + 2501 \text{ kJ}/\text{kg} - 4.197 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{出口}}/^\circ\text{C}} \quad (13)$$

出口では条件より相対湿度は 100 % であるので $x_{\text{出口}} = x_{\text{飽和}}$ として式 (5) より次式 (14) が得られる。

$$x_{\text{飽和}} = 0.622 \frac{P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{出口}})}{101325 \text{ Pa} - P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{出口}})} \quad (14)$$

式 (13) において出口温度 $T_{\text{出口}}$ が湿球温度 $T_{\text{湿}}$ 、入口温度 $T_{\text{入口}}$ が気温 (乾球温度) $T_{\text{乾}}$ であり、 $x_{\text{入口}}$ が求めたい絶対湿度 x である。(14) を代入して次式が得られる。

$$x = \frac{1.006 \text{ kJ}/(\text{kg K})(T_{\text{乾}} - T_{\text{湿}}) - (2501 \text{ kJ}/\text{kg} - 2.352 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{湿}}/^\circ\text{C})0.622 \frac{P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{湿}})}{101325 \text{ Pa} - P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{湿}})}}{1.845 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{乾}}/^\circ\text{C} + 2501 \text{ kJ}/\text{kg} - 4.197 \text{ kJ}/\text{kg} \times T_{\text{湿}}/^\circ\text{C}} \quad (15)$$

飽和空気の水蒸気分圧 $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{湿}})$ は式 (10) で示したように次式のように $T_{\text{湿}}$ の関数として表すことができる。次式を上式 (15) の $P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{湿}})$ へ代入すれば、 x を $T_{\text{乾}}$ と $T_{\text{湿}}$ のみから求めることができる (ここでは長くなりすぎるので代入はしない)。

$$\begin{aligned} P_{\text{水蒸気 (飽和)}}(T_{\text{湿}}) = & \{1.004 + (0.0008T_{\text{湿}}/^\circ\text{C} - 0.004)^2\} \{ \exp(-0.58002206 \times 10^4(T_{\text{湿}}/^\circ\text{C} + 273.15)^{-1} \\ & + 0.13914993 \times 10 - 0.48640239 \times 10^{-1}(T_{\text{湿}}/^\circ\text{C} + 273.15) \\ & + 0.41764768 \times 10^{-4}(T_{\text{湿}}/^\circ\text{C} + 273.15)^2 - 0.14452093 \times 10^{-7}(T_{\text{湿}}/^\circ\text{C} + 273.15)^3 \\ & + 0.65459673 \times 10 \log_e(T_{\text{湿}}/^\circ\text{C} + 273.15) \} \end{aligned}$$

この湿球温度である断熱飽和温度は通風冷却塔において得られる水の最低温度としても計算に使われる。これは上で説明した水路のモデルで空気側ではなく水側に注目し、最も冷やされる空気が飽和状態 (相対湿度 100 %) となるまで冷えた場合と捉えている。

3 湿り空気線図

乾球温度と湿球温度から湿度を求める際に、毎回これまで出した式を用いて計算することは煩わしいため、湿り空気線図がよく用いられる。横軸は空気の温度 (乾球温度)、縦軸は絶対湿度とする。相対湿度と湿球温度の線を引きたい。必要な式は、各相対湿度における乾球温度と絶対湿度の関係、各湿球温度における乾球温度と絶対湿度の関係である。

参考文献

- [1] 手塚 俊一, 藤田 稔彦, 湿り空気線図とその応用-2-実在気体としての湿り空気-1-(講座), 空気調和・衛生工学 58(1), p87-96, 1984-01
- [2] 社団法人 日本冷凍空調学会, 冷凍空調便覧 第 I 巻 基礎編 第 6 版, 社団法人 日本冷凍空調学会, 2010.
- [3] Yunus A. Cengel, Michael A. Boles, Thermodynamics: an engineering approach, 7th ed., McGraw-Hill, 2011.
- [4] CoolProp, <http://www.coolprop.org/>.