熱伝導率と熱拡散率（温度伝導率）の違い

2025 年 1 月 7 日　椿 耕太郎

熱伝導率と熱拡散率（温度伝導率）の違いについて詳しくみていく。熱伝導率（Thermal conductivity）の単位は W/(m K)、熱拡散率（温度伝導率、熱拡散係数、温度拡散率とも呼ばれる）（Thermal diffusivity）の単位は m/s² である。熱伝導率と熱拡散率はともに物質と状態が決まれば値が決まる物性値である脚注 1。

1　熱伝導率と熱拡散率の定義

熱伝導率と熱拡散率の定義をまず示す。熱伝導率 k [W/(m K)] は次式で表されるフーリエの法則で定義される。

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

熱流束 q [W/m²] 脚注 2と温度勾配 $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ [K/m] 脚注 3の関係において、熱伝導率 k [W/(m K)] が熱の伝わりやすさを示す。

熱拡散率 a [m²/s] は熱伝導率 k [W/(m K)] を比熱 c_p [J/(kg K)] と密度 ρ [kg/m³] で割ることで求められる。

$$a = \frac{k}{\rho c_p}$$

上式だけだと熱拡散率がどのような意味を持つ値であるのか、熱伝導率と何が違うのか分かりにくい。

2　熱伝導率と熱拡散率の関係

熱伝導率と熱拡散率の関係を想像しやすいように、熱と温度を水槽に貯まる水の量と水位に例える。図 1 のように細長い水槽が並んでいて左から水が入り、水槽の間の壁には穴があいていて隣の水槽に水が流れ込む水槽の列を考える。流れてくる水の量が伝熱量（伝わる熱の量）に、水槽の水位の変化が温度の変化に対応する。水槽の奥行きが密度 ρ [kg/m³] ×比熱 c_p [J/(kg K)] に対応し、奥行きが深いと水が貯まっても水位は変化しづらい（密度×比熱が大きいと熱が伝わっても温度が変わりにくい）。温度差が増えると伝わる熱の量も増えるように、水位の差が大きいと流れ込む水の量も増える。熱伝導率は温度差（温度勾配）に対しての熱の伝わりやすさであり、水

脚注 1 流体（気体と液体）の粘性を表す粘性係数（粘度） Dynamic viscosity と動粘性係数（動粘度） Kinematic viscosity の関係に近い。
脚注 2 伝わる面積を掛ければ伝熱量 [W] が得られる。
脚注 3 x 方向のみの一次元の場合

槽で考えると水位差に対してどれだけ水が流れ込むか、すなわち水槽の間の穴の数（大きさ）となる。それに対して熱拡散率（温度伝導率）は熱伝導率を密度×比熱で割った値であり温度の伝わりやすさを表す。水槽であれば水位の変わりやすさであり、穴の数（大きさ）を水槽の奥行きで割った値である。穴の数が多くても水槽の奥行きが深ければ、水が多く流れ込んでも水位の変化が小さい、すなわち熱伝導率が大きくても密度×比熱が大きければ温度変化は小さい。

熱伝導率は水槽の例だと水の流れるやすさであり、すなわち熱の伝わりやすさを表しているのに対して、熱拡散率は水位の変化のしやすさ、すなわち温度変化の伝わる速度を表している。

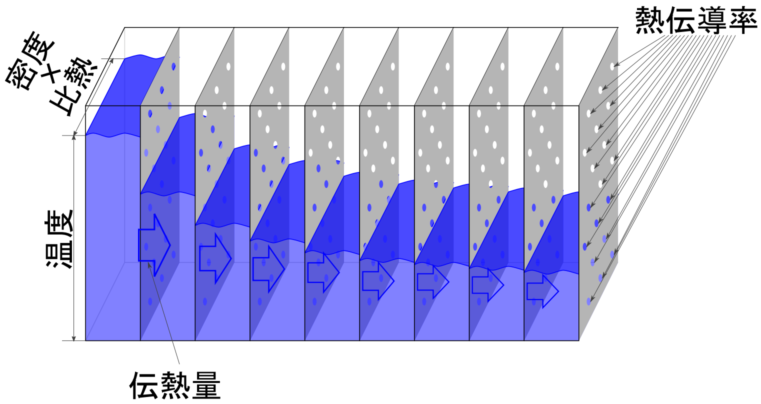

図 1　水槽での比喩

3　熱拡散率の意味

熱拡散率の意味をより厳密に導き、等温面の伝わる速さを表すことを示す。大きな塊の固体の片面を一定温度で加熱した場合の、固体内の温度の伝わりと熱拡散率との関係を考えてみよう。大きな肉の塊を加熱されたフライパンで焼くことを想像してもよい（図 2）[脚注 4]。熱拡散率の異なる個体での経過時間ごとの温度分布を計算し、熱拡散率と等温面の変化の関係を見ていく。

非定常熱伝導方程式を解き温度の厳密解から温度分布を求めた（詳細な導出は文末の付録 A に示す）。条件として、固体は加熱を始めるまでは温度は T_0 で一定で、加熱は個体の一方の端から温度 T_w でされるとする。経過時間 t [s] は加熱開始を $t = 0$ s とし、加熱面から垂直に座標 x [m] をとり加熱面を $x = 0$ m とする。固体内の温度

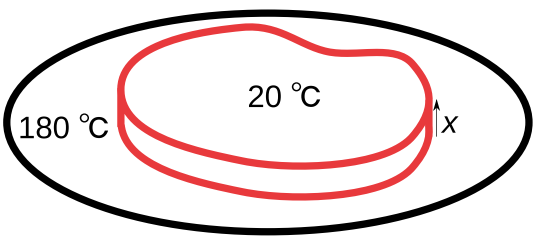

図 2　肉の加熱

[脚注 4] 焼き始めてからしばらく、肉が焼け加熱されていない面の温度が変化を始めるまでは、十分に大きな塊として扱うことができる。

分布は次式のように余誤差関数 erfc [脚注 5] で表される。

$$T = T_0 + (T_w - T_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \tag{1}$$

上式の T は $\sqrt{at}/x$ の関数となっており、固体内の任意の位置 x と時間 t での温度 T が分かる。

肉を焼く例（図 2）で数値を入れ具体的に温度を計算してみる。肉は初め室温で $T_0 = 20$ ℃、フライパンと肉の接触面は $T_w = 180$ ℃で加熱されるとする。肉をフライパンに置いた時間が $t = 0$ s、フライパンと肉の接触面が $x = 0$ m となる。熱拡散率 a [m²/s] は通常の肉に近い値 $a = 1.3 \times 10^{-7}$ m²/s と通常の三倍の赤い肉[脚注 6]（熱拡散率 $a = 3.9 \times 10^{-7}$ m²/s）について計算する。式 (1) に条件を入れ温度分布の式を求める。1 分後（$t = 60$ s）の通常の肉の分布は次式となる。

$$\begin{aligned} T &= 20\,℃ + 160\,℃ \times \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{1.3\times 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \times 60\ \mathrm{s}}}\right) \\ &= 20\,℃ + 160\,℃ \times \mathrm{erfc}\,(1.79 \times 10^2\ x/\mathrm{m}) \end{aligned}$$

上式から任意の位置 x に対する温度 T を求めることができる。各位置の温度を表計算ソフトなどで計算すると温度分布を図 3 の様に求められる。グラフの左側 $x = 0$ がフライパンの表面で、その右側が肉の内部の温度分布を示している。同様に式 (1) に条件を入れることで、通常の肉と三倍の赤い肉の 1 分後、2 分後、3 分後、4 分後、5 分後の温度分布を求めることができる（図 4 および図 5)。

温度分布の図 4 および図 5 から熱拡散率の影響を見ていく。図中で肉に火の通る（変性する）60 ℃の位置を赤丸で示した。図 4 の通常の肉の 1 分後の温度分布を見ると、4 mm と少しの位置まで 60 ℃より高く肉に火が通っ

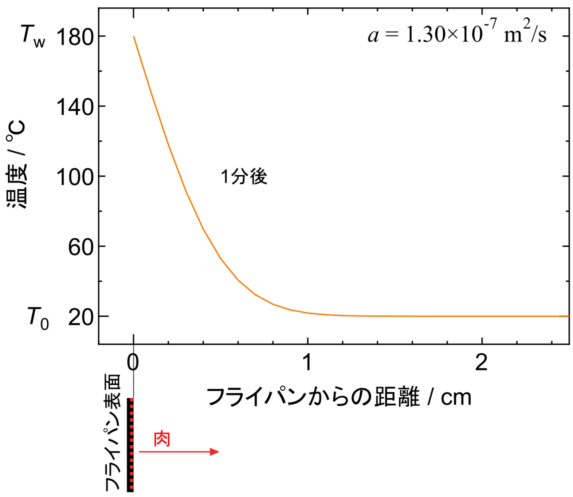

図 3　1 分後の温度分布

[脚注 5] 余誤差関数は次式で定義される関数である。

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2} d$$

余誤差関数 erfc は表計算ソフトなどで値を求めることができる。

[脚注 6] 専用の肉

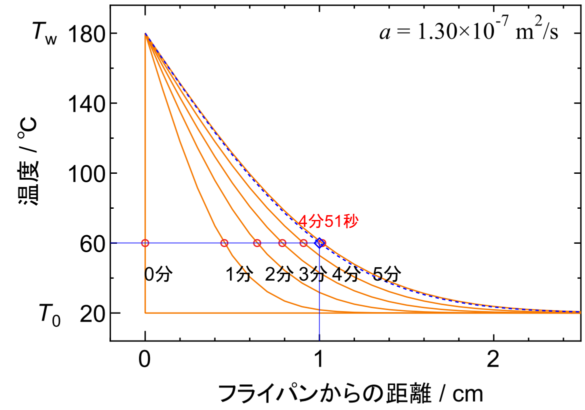

図 4　普通の肉の温度分布

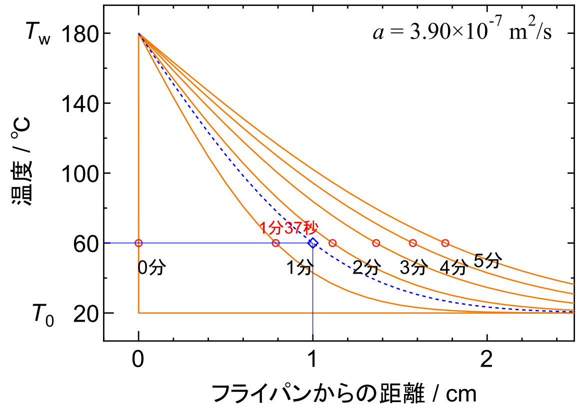

図 5　三倍の赤い肉の温度分布

ていることが分かる。図 5 の熱拡散率が通常の三倍の赤い肉の温度分布を見ると、8 mm より少し短い位置まで 60 ℃より高く火が通っている。両方の図で時間の経過とともに 60 ℃である赤丸の位置が右に移動し、火の通っている厚さが増えている。この二つの温度分布のグラフを、ある位置のある温度に達するまでの時間に注目して見てみると、熱拡散率が三倍の赤い肉では通常の肉に比べて、ある位置のある温度に達するまでの時間は三分の一となっていることが分かる。例えば、1 cm の厚さが火が通る（60 ℃を越える）までの時間は通常の肉では 4 分 51 秒（291 s）（図 4 中青印）だが、三倍肉ではその三分の一の 1 分 37 秒（97 s）（図 5 中青印）となる。このように熱拡散率が大きくなると、ある一定の温度となるまでの時間が短くなる、すなわち等温面の伝わる速度が速くなる。

4　熱拡散率の詳細

熱拡散率の詳細を無次元数であるフーリエ数 Fo を使って見ていく。さらに、熱拡散率の値の大きさが何を表しているのか、より詳しく考えていく。

等温面の移動する位置と時間と熱拡散率との関係は無次元数であるフーリエ数 Fo を使うと、より具体的な値を求めやすい。式 (1) の T は $\sqrt{at}/x$ の関数となっており、これを 2 乗した at/x^2 は無次元数でフーリエ数 $Fo = at/x^2$ と呼ばれる。式 (1) をフーリエ数 Fo を使って表すと次式となる。

$$T = T_0 + (T_w - T_0)\mathrm{erfc}\frac{1}{2\sqrt{Fo}} \tag{2}$$

上式右辺の中で変数は Fo のみであり、固体内の温度 T はフーリエ数 Fo のみの関数となっている。つまり、ある値の温度に対してはある一つの値のフーリエ数が対応する。このフーリエ数 Fo を使って、図 4、図 5 で赤丸で示した肉の塊を焼く際にどこまで火が通るかを計算してみよう。肉が焼ける（変性する）温度 $T = 60$ ℃に対応するフーリエ数 $Fo_{60\,℃}$ は、$T_w = 180$ ℃、$T_0 = 20$ ℃と式 (2) より次のように求められる。

$$60\,℃ = 20\,℃ + (180\,℃ - 20\,℃)\mathrm{erfc}\frac{1}{2\sqrt{Fo_{60\,℃}}}$$

$$0.25 = \mathrm{erfc}\frac{1}{2\sqrt{Fo_{60\,℃}}}$$

$$Fo_{60\,℃} \simeq 0.378$$

上式の Fo が約 0.378 となる肉の温度 60 ℃の条件を、フーリエ数の定義 $Fo = at/x^2$（時間 t、位置 x）で書き直すと次式となる。

$$\frac{at_{60\,℃}}{x^2_{60\,℃}} = 0.378$$
$$x^2_{60\,℃} = \frac{at_{60\,℃}}{0.378} \tag{3}$$

上式から肉の中での 60 ℃の等温面の位置 $x_{60\,℃}$ と時間 $t_{60\,℃}$ の関係が分かる。図 4 の赤丸と比べてみよう。普通の肉（熱拡散率 $a = 1.3 \times 10^{-7}$ m²/s）で 4 分 51 秒（291 s）を代入する。

$$x^2_{60\,℃} = \frac{1.3 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \times 291\ \mathrm{s}}{0.378}$$
$$x^2_{60\,℃} = 0.00010007\cdots\ \mathrm{m^2}$$
$$x_{60\,℃} = 0.0100\cdots\ \mathrm{m}$$
$$x_{60\,℃} \simeq 1\ \mathrm{cm}$$

上式のように図 4 と同じように 4 分 51 秒（291 s）後に距離が 1 cm となることが確認できる。同様に、肉の熱拡散率 $a = 1.3 \times 10^{-7}$ m²/s と肉が焼けている距離もしくは時間のどちらかを式 (3) に代入すれば、肉が焼けている時間もしくは距離を求めることができる。また、三倍の赤い肉でも熱拡散率 $a = 3.9 \times 10^{-7}$ m²/s と 1 分 37 秒（97 s）を代入することで、図 5 と同じ 1 cm を求めることができる。つまり、式 (3) で表されるように熱拡散率は等温面がある時間（$t_{60\,℃}$）経過した際にどれくらい進んでいるか（$x_{60\,℃}$）を表しており、等温面の移動する速度を表している[脚注 7]。すなわち、熱拡散率は等温面（温度）の伝わる（伝導）速さを表している[脚注 8]。

　熱拡散率の値の大きさの意味の捉え方を考えてみよう。フーリエ数 Fo が 1 の条件を考えると熱拡散率がとらえやすい（$Fo = at/x^2$、時間 t、位置 x）。式 (2) に $Fo = 1$ を代入すると次式のように条件が求められる。

$$T = T_0 + (T_\mathrm{w} - T_0)\mathrm{erfc}\frac{1}{2\sqrt{1}}$$
$$\frac{T - T_0}{T_\mathrm{w} - T_0} = \mathrm{erfc}\frac{1}{2}$$
$$\frac{T - T_0}{T_\mathrm{w} - T_0} = 0.4795\cdots$$

上式のように左辺の温度の比が 0.4795･･･、約 0.5 になる条件が $Fo = 1$ となる条件である。左辺の温度の比は、分母が最高温度と最低温度の差であり、分子が最低温度からの変化分を、全体では無次元で温度分布の中での相対的な値を表し、無次元温度と呼ばれる。先ほどの例であればフライパンの表面が $T_\mathrm{w} = 180$ ℃、初期温度が $T_0 = 20$ ℃

脚注 7 60 ℃以外の等温面の位置を求めたい場合には定数は 0.378 ではなく、式 (2) から求めたい温度のフーリエ数を計算する。
脚注 8 このことから熱拡散率は温度伝導率とも呼ばれる。

であるので、無次元温度が約 0.5 になる温度は約 100 ℃[脚注 9]である。温度が約 100 ℃の等温面のある時間 t での位置 x は $Fo = 1$ であることから次式が成り立つ（最後に $t_{100\ ℃}$=1 s を代入する）。

$$
\begin{aligned}
Fo_{100\ ℃} &= at_{100\ ℃}/x^2_{100\ ℃} \\
1 &= at_{100\ ℃}/x^2_{100\ ℃} \\
a &= x^2_{100\ ℃}/t_{100\ ℃} \\
x_{100\ ℃,1s} &= \sqrt{a \times 1\ s}
\end{aligned}
$$

上式から 1 s 後の約 100 ℃（無次元温度約 0.5）の等温面の位置は $\sqrt{a}$ であることが分かる。先にあげた肉の熱拡散率 $a = 1.3 \times 10^{-7}$ m²/s であれば、$\sqrt{a \times 1\ \mathrm{s}} = \sqrt{1.3 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2/s} \times 1\ \mathrm{s}} \simeq 0.00036\ \mathrm{m} = 0.36\ \mathrm{mm}$ だけ等温面が 1 s 後に進むことが分かる。1 s 後に無次元温度が約 0.5 の等温面が進む距離の二乗を表したのが熱拡散率の値であるととらえれば、数値の大きさがとらえやすいのではないだろうか。

A 付録-熱伝導方程式の解

熱伝導方程式の解き方を示す。

A.1 条件

条件として一定温度の加熱面と大きな固体（半無限固体）で、一次元の発熱なしの非定常熱伝導方程式を以下の初期条件と境界条件で解くと、固体内の温度 T の余誤差関数 erfc の関係式を求められる。

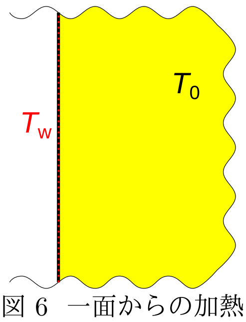

図 6 一面からの加熱

支配方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{4}$$

[脚注 9] より正確には無次元温度 0.4795 で 96.72 ℃

初期条件　$t=0$ で全ての x で $T=T_0$

$$T(x,0)=T_0$$

境界条件　$x=0$ で $T=T_\mathrm{w}$

$$T(0,t)=T_\mathrm{w}$$

境界条件　$x=\infty$ で $T=T_0$

$$T(\infty,t)=T_0$$

A.2　無次元化

　無次元化をして支配方程式を解く。支配方程式と初期条件、境界条件の温度 T を次式で表される無次元温度 θ に変換する。

$$\theta=\frac{T-T_0}{T_\mathrm{w}-T_0} \tag{5}$$

上式 (5) から温度 T は次のように表される。

$$\begin{aligned}\theta&=\frac{T-T_0}{T_\mathrm{w}-T_0}\\ \theta(T_\mathrm{w}-T_0)&=T-T_0\\ T&=(T_\mathrm{w}-T_0)\theta+T_0\end{aligned}$$

支配方程式　式 (4) へ代入する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t}&=a\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\\ \frac{\partial}{\partial t}(T_\mathrm{w}-T_0)\theta+T_0&=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T_\mathrm{w}-T_0)\theta+T_0\\ \frac{\partial\theta}{\partial t}&=a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{6}$$

　　T_0 と T_w は定数であるため、元の T の式と同じ形となる。

初期条件　$t=0$ で全ての x で $\theta=0$

$$\theta(x,0)=0 \tag{7}$$

境界条件 $x=0$ で $\theta=1$

$$\theta(0,t)=1 \tag{8}$$

境界条件 $x=\infty$ で $\theta=0$

$$\theta(\infty,t)=0 \tag{9}$$

A.3 ラプラス変換

ラプラス変換[脚注 10]をして、無次元温度で変形した微分方程式を解く[脚注 11]。

支配方程式 式 (6) の両辺をラプラス変換する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\} &= \mathcal{L}\left\{a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\} \\
\int_0^\infty e^{-st}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}dt &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right\}dt \\
\left[e^{-st}\theta\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial e^{-st}}{\partial t}\theta dt &= \underbrace{a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt}_{\theta \text{ は } x \text{ と } t \text{ の二変数で偏微分であるが、} t \text{ で積分をすることで } t \text{ の関数ではなくなり } \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 \text{ で表される。}} \\
e^{-s\infty}\theta(x,\infty) - e^{-s0}\theta(x,0) - \int_0^\infty \left(-se^{-st}\theta\right)dt &= a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \\
\underbrace{\frac{\theta(x,\infty)}{e^{s\infty}}}_{\infty \text{ で割るので } 0} - \underbrace{\theta(x,0)}_{\text{初期条件の式 (7) より } 0} + s\int_0^\infty e^{-st}\theta dt &= a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \\
s\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt &= a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt \\
\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt}_{\Theta \text{ と置く}} &= \frac{a}{s}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\theta(x,t)dt}_{\Theta \text{ と置く}} \\
\Theta &= \frac{a}{s}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} \qquad (10)
\end{aligned}$$

上式 (10) の Θ は次式の一般解がある。

$$\Theta = C_1 e^{x\sqrt{s/a}} + C_2 e^{-x\sqrt{s/a}} \tag{11}$$

境界条件 式 (8) の $x=0$ での境界条件をラプラス変換する。

$$\mathcal{L}(\theta(0,t)) = \mathcal{L}(1)$$

脚注 10 ラプラス変換の計算は参考書等に載っているラプラス変換表を参照する。例えば [1]。
脚注 11 $\mathcal{L}(z(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st}z(x,t)dt$

$$\int_0^\infty e^{-st}\theta(0,t)dt = \underbrace{\int_0^\infty e^{-st}dt}_{\text{ラプラス変換表より計算}}$$
$$\Theta_{x=0} = \frac{1}{s} \tag{12}$$

境界条件 式 (9) の $x=\infty$ での境界条件をラプラス変換する。

$$\mathcal{L}(\theta(\infty,t)) = \mathcal{L}(0)$$
$$\int_0^\infty e^{-st}\theta(\infty,t)dt = \int_0^\infty 0dt$$
$$\Theta_{x=\infty} = 0 \tag{13}$$

境界条件の適用 式 (11) の不定定数を消すためにラプラス変換した境界条件の式 (13) を式 (11) へ適用する。

$$\Theta_{x=\infty} = 0$$
$$C_1 e^{\infty\sqrt{s/a}} + \underbrace{C_2 e^{-\infty\sqrt{s/a}}}_{\infty\text{ で割るので }0} = 0$$
$$C_1 \underbrace{e^{\infty\sqrt{s/a}}}_{\infty\text{ となるため式が成り立つためには }C_1=0\text{ でなくてはならない}} = 0$$
$$C_1 = 0 \tag{14}$$

よって式 (14) を式 (11) へ代入し次式となる。

$$\Theta = C_2 e^{-x\sqrt{s/a}} \tag{15}$$

境界条件の式 (12) を式 (15) へ適用する。

$$\Theta_{x=0} = \frac{1}{s}$$
$$C_2 e^{-0\sqrt{s/a}} = \frac{1}{s}$$
$$C_2 = \frac{1}{s} \tag{16}$$

式 (15) へ式 (16) を代入し次式となる。

$$\Theta = \frac{1}{s}e^{-x\sqrt{s/a}} \tag{17}$$

A.4　解

解を得るため上式 (17) の両辺を逆ラプラス変換をする。ラプラス変換表より次の関係が得られる[脚注 12]。

$$\begin{aligned}\theta &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-y}dy \\ &= 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\ &= \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

無次元温度 θ を有次元の温度 T へ戻す（式 (5)）。

$$\begin{aligned}\theta &= \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\ \frac{T - T_0}{T_\mathrm{w} - T_0} &= \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\ T &= T_0 + (T_\mathrm{w} - T_0)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

温度 T の式が得られた。

参考文献

[1] 原島 博, 堀 洋一, 工学基礎 ラプラス変換と z 変換, 数理工学社, 2004.

脚注 12 余誤差関数は次式で定義される関数である。

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z)$$

上式中の erf は誤差関数で次式のように定義されている。

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-y^2}dy$$