

系がする仕事と取り出せる仕事

2019年06月27日 椿 耕太郎

熱力学で閉じた系を扱う際には、系の内部のみを考え、仕事を周囲にする際に周囲でどのように仕事が行われるか考えることは少ない。エンジンのような熱機関で系（ピストンを可動壁とする閉じた系を考える）から仕事を取り出したいサイクルにおいて、系の周囲の流体の圧力を考えると、その流体の圧力によりピストンの支持棒への力が変化し、“系が周囲にする仕事”と“取り出せる仕事”が異なることがある。系からピストンにかかる力と周囲からピストンへかかる力は釣り合う（図1）。系の圧力によりピストンに働く力は、ピストンへの系の圧力 $P_{\text{sys}}[\text{Pa}]$ とピストンの断面積 $A_{\text{pis}}[\text{m}^2]$ で $P_{\text{sys}}A_{\text{pis}}[\text{N}]$ と表される。周囲からピストンへの力は、系外の流体の圧力 $P_{\text{env}}[\text{Pa}]$ 、ピストンの断面積 $A_{\text{pis}}[\text{m}^2]$ 、ピストンの支持棒の力 $F_{\text{pis}}[\text{N}]$ で $(P_{\text{env}}A_{\text{pis}} + F_{\text{pis}})[\text{N}]$ と表される。ピストンの支持棒が動くことで、エンジンであればタイヤに仕事が伝わり、系から仕事を取り出すことができる。この力の釣り合いから次式が成り立つ。

$$P_{\text{sys}}A_{\text{pis}} = P_{\text{env}}A_{\text{pis}} + F_{\text{pis}} \quad (1)$$

例えば車のエンジンのピストンなどは大気中で動作するため、系外の空気にも仕事をしている。系外の空気の圧力が大気圧 0.1 MPa ($P_{\text{env}} = 0.1 \text{ MPa} = 100\,000 \text{ Pa}$)、ピストンの断面積が 0.01 m^2 ($A_{\text{pis}} = 0.01 \text{ m}^2$) である場合を考える。この時、ピストンが周囲から内部に向かって、系外の空気の圧力により加えられる力は次のように計算できる。

$$P_{\text{env}}A_{\text{pis}} = 100\,000 \text{ Pa} \times 0.01 \text{ m}^2 = 1\,000 \text{ N} = 1 \text{ kN}$$

このとき、ピストン内部の圧力が 10.0 MPa ($P_{\text{sys}} = 10.0 \text{ MPa} = 10\,000\,000 \text{ Pa}$) であると、系からピストンへ加えられる力は次のように計算できる。

$$P_{\text{sys}}A_{\text{pis}} = 10\,000\,000 \text{ Pa} \times 0.01 \text{ m}^2 = 100\,000 \text{ N} = 100 \text{ kN}$$

上の2つの値を式(1)へ代入すると、次のようにピストンで力が釣り合うために支持棒に加える必要のある力が求まる（この力の分だけ仕事を取り出すことができる）。

$$100 \text{ kN} = 1 \text{ kN} + F_{\text{pis}}$$

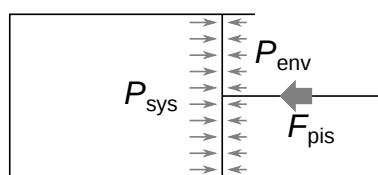


図1 力の釣り合い（系の圧力が高い場合）

$$F_{\text{pis}} = 99 \text{ kN}$$

支持棒が 99 kN の力でピストンを押すと釣り合う。この釣り合っているピストンの支持棒の力をわずかに小さくすると、系は膨張する。簡単のため、系の体積が変化しても圧力は大きく変わらず $P_{\text{sys}}[\text{Pa}]$ は一定とし、体積が $\Delta V = 0.0005 \text{ m}^3$ 変化した場合を考える。このとき、ピストンの移動距離 $\Delta l[\text{m}]$ は次のように計算される。

$$\Delta l = \Delta V / A_{\text{pis}} = 0.0005 \text{ m}^3 / 0.01 \text{ m}^2 = 0.05 \text{ m}$$

この際の、系がした仕事 $W_{\text{sys}}[\text{J}]$ 、系が系外空気にした仕事 $W_{\text{env}}[\text{J}]$ 、系が支持棒にした取り出すことのできる仕事 $W_{\text{pis}}[\text{J}]$ の関係は次のようになる。この節でのみ仕事の符号の向きの定義を変え、系からも周囲からもピストンへ向かう方向の仕事を正とする。

$$W_{\text{sys}} = W_{\text{env}} + W_{\text{pis}}$$

また、それぞれの値は次のように求められる。

$$W_{\text{sys}} = P_{\text{sys}} \Delta V = 10\,000\,000 \text{ Pa} \times 0.0005 \text{ m}^3 = 5\,000 \text{ J}$$

$$W_{\text{env}} = P_{\text{env}} \Delta V = 100\,000 \text{ Pa} \times 0.0005 \text{ m}^3 = 50 \text{ J}$$

$$W_{\text{pis}} = F_{\text{pis}} \Delta l = 99\,000 \text{ N} \times 0.05 \text{ m} = 4\,950 \text{ J}$$

系（エンジン）は 5 000 J の仕事をしている。そのうち支持棒に 4 950 J、系外空気に 50 J の仕事をしている。支持棒にされる仕事 4 950 J が取り出される仕事¹、車のエンジンであればタイヤへ伝わる動力である。

では、図 2 のように系の圧力が系外の流体の圧力よりも小さい場合はどうなるだろうか。例えば先端をふさいだ注射器を大気圧下で引く場合は注射器の内部の圧力が低い。このとき、注射器を動かすには仕事をする必要がある¹ので、系は仕事をされて膨張しているように感じるかもしれない。しかし、系の内部のみを考えると膨張し体積が増えているため、周囲に仕事をしている。系の内部も仕事をしているし、注射器を引く手も仕事をしている。何に対して仕事をしているのだろうか。系（注射器）の外の空気が大気圧 0.1 MPa で、系（注射器内部）の圧力がそれよりも低い 0.05 MPa のときを考える。ピストンの断面積はエンジンの場合と同様とする。系外空気の圧力により加えられる力は同様に $P_{\text{env}} A_{\text{pis}} = 1 \text{ kN}$ である。系からピストンへ加えられる力は次のように計算できる。

$$P_{\text{sys}} A_{\text{pis}} = 50\,000 \text{ Pa} \times 0.01 \text{ m}^2 = 500 \text{ N} = 0.5 \text{ kN}$$

上の 2 つの値を式 (1) へ代入すると、次のようにピストンで力が釣り合うために支持棒に加える必要のある力が求まる。

$$0.5 \text{ kN} = 1 \text{ kN} + F_{\text{pis}}$$

¹ 支持棒へした仕事（取り出せる仕事） $W_{\text{pis}} = F_{\text{pis}} \Delta l$ は式 (1) より次のように表される。

$$W_{\text{pis}} = P_{\text{sys}} \Delta V - P_{\text{env}} \Delta V = (P_{\text{sys}} - P_{\text{env}}) \Delta V$$

$(P_{\text{sys}} - P_{\text{env}})$ のように、周囲環境と系との圧力差で示した圧力をゲージ圧と呼び多くの圧力計はこのゲージ圧を測定している。このゲージ圧を用いると体積変化 ΔV から取り出せる仕事を求めることができる。

$$F_{\text{pis}} = -0.5 \text{ kN}$$

ピストンへ向かう方向が正であるので、支持棒はピストンを 0.5 kN の力で引っ張っている。この際の、系がした仕事 $W_{\text{sys}}[\text{J}]$ 、系が系外空気にした仕事 $W_{\text{env}}[\text{J}]$ 、系が支持棒にした仕事 $W_{\text{pis}}[\text{J}]$ は次のようになる。

$$W_{\text{sys}} = P_{\text{sys}} \Delta V = 50\,000 \text{ Pa} \times 0.000\,5 \text{ m}^3 = 25 \text{ J}$$

$$W_{\text{env}} = P_{\text{env}} \Delta V = 100\,000 \text{ Pa} \times 0.000\,5 \text{ m}^3 = 50 \text{ J}$$

$$W_{\text{pis}} = F_{\text{pis}} \Delta l = -500 \text{ N} \times 0.05 \text{ m} = -25 \text{ J}$$

系は 25 J の仕事をしている。そのうち支持棒に -25 J、系外空気に 50 J の仕事をしている。系と支持棒で 25 J ずつ系外空気に仕事をしていることになる。系も支持棒も周囲の空気に対して仕事をしている。このように、系外流体の圧力が系の圧力よりも高い場合には、系が膨張する場合にもピストンの支持棒を引っ張る必要があり、系が仕事をされているように感じるが、系とピストンの支持棒はともに系外の流体に仕事をしている。

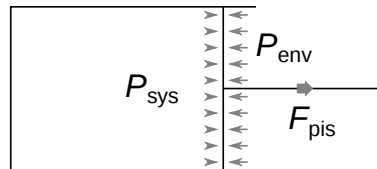


図 2 力の釣り合い（系の圧力が低い場合）

ここで仕事はすべて正の値とすると、以下の関係が成り立つ。

$$\text{系が周囲へした仕事} = \text{系外の流体へした仕事} + \text{支持棒へした仕事（取り出せる仕事）}$$

“系が周囲へした仕事”が“系が系外の流体へした仕事”がよりも小さい場合、系が膨張する場合でも注射器のように引っ張って仕事をする必要があり、系は周囲に仕事をしているが“取り出せる仕事”が負の値となり、支持棒で系に仕事をしなくてはならない。“系が周囲へした仕事”は、取り出すことのできる“ピストンが支持棒にした仕事”のみではなく“系外の流体への仕事”を含めた仕事となる。

この図を含む文章の著作権は椿耕太郎にあり、クリエイティブ・コモンズ 表示 - 非営利 - 改変禁止 4.0 国際 ライセンスの下に公開する（ライセンスの詳細 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.ja>）。最新版は <http://camellia.net> で公開している。