

粘性係数（粘度）と動粘性係数（動粘度）の違い

平成 27 年 11 月 24 日 椿 耕太郎

粘性係数（粘度） Dynamic viscosity と動粘性係数（動粘度） Kinematic viscosity はともに物質と状態が決まれば値が決まる物性値であり、流体（気体と液体）の性質を表す。

1 粘性係数

粘性係数は流体に働く粘性力の強さを表している。流体の流れがあり、その中で速度に違いがあると、図 1 に示すように速度が速い流体は遅く（図中赤点線矢印）、速度の遅い流体は早くする方向（図中赤実線矢印）に粘性力が働く。このときに流体間に働く力は単位面積あたりの応力 τ （単位：N/m²）^{脚注 1} として速度 u （単位：m/s）の勾配と粘性係数 μ （単位：Pa s）より次式のように表される。

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

粘性係数は上式によって定義される流体の粘性力の伝わりやすさを表した値である。

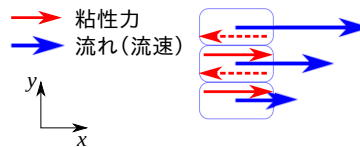


図 1 粘性力

2 動粘性係数

動粘性係数は速度の拡散しやすさと捉えることができる。しかし、速度の拡散とはどんな性質を表しているのか少し分かりにくい。そこで静止した水の中に手を入れて動かした場合を例として考える。静止した水に力を加える（手を入れて動かす）とまず力を加えた箇所の水が動き出す。動き出した水と周囲の静止した水の間働く粘性力により、周囲の水も動き出す。粘性により力が伝わり、力を受けた周囲の水は動きだし、速度が進行方向と垂直に拡散するように見える。動粘性係数はこの速度の拡散のしやすさを表した値である。速度の伝わりやすさ（動粘性係数）は力の伝わりやすさ（粘性係数）と密度によって決まる。粘性係数が大きいと大きな力が伝わるが、物質の質量（密度）が大きければ大きな力が加わっても速度は大きく変化しない。質量（密度）が小さけ

脚注 1 文中で理解を深めるため、それぞれの変数の SI（国際単位系）における単位を（単位：）により表す。

れば大きな力でなくても速度も大きく変化し、遠くまで速度の変化が拡散する。このことから動粘性係数 ν (単位: m^2/s) は次式のように粘性係数 μ (単位: $\text{Pa}\cdot\text{s}$) を密度 ρ (単位: kg/m^3) で割ることで定義されている。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1)$$

3 違い

粘性係数の表す力の拡散と動粘性係数の表す速度の拡散はどう違うのだろうか。粘性力と速度の拡散を図 2 に示すように四種類の流体(液体か気体)を仮定して考える。流体 1 は粘性係数が大きく密度が小さい(式(1)より動粘性係数は大きくなる)、流体 2 は粘性係数が大きく密度が大きい(式(1)より動粘性係数は小さくなる)、流体 3 は粘性係数が小さく密度が小さい(動粘性係数は流体 2 と同じ程度に小さいとする)、流体 4 は粘性係数が小さく密度が大きい(式(1)より動粘性係数は極めて小さくなる)。図 2 に示すように、この 4 種類の流体の中に壁があり、その壁が突然動いた時の流体の力の作用と速度の変化を考える。壁が動き出すと、粘性係数の大きな流体 1、流体 2 では流体に大きな粘性力(図中赤矢印)が働き、粘性係数の小さな流体 3 と流体 4 では比較的小さな力が働く。流体に力が働くと動きだし、速度が生じる。密度の小さい流体 1 では流体は壁に近い速度で動き出す。流体 2 では密度が大きく重いため同じ力が働いても流体 1 よりも速度は遅くなる。流体 3 では力は小さいが密度も小さく軽いため流体 2 と同じ程度の速度となる。流体 4 では力が小さく密度が大きいため速度は極めて遅くなる。力は図中下に向かって伝わり徐々に下方の流体に速度が生じていく。動粘性係数が大きな流体 1 では下の流体でも壁の速度に近い速度で動く。動粘性係数が小さい流体 2 と流体 3 では速度は壁に比べ遅くなる。流体 2 と流体 3 では粘性係数が異なるため働く粘性力は異なるが、動粘性係数が近いので流体の速度は近い速度分布となる。流体 4 では動粘性係数が極めて小さいので下方の流体の速度は壁に比べ極めて遅くなる。このように、粘性係数は力の伝わりやすさを表し、動粘性係数は速度の伝わりやすさを表している。

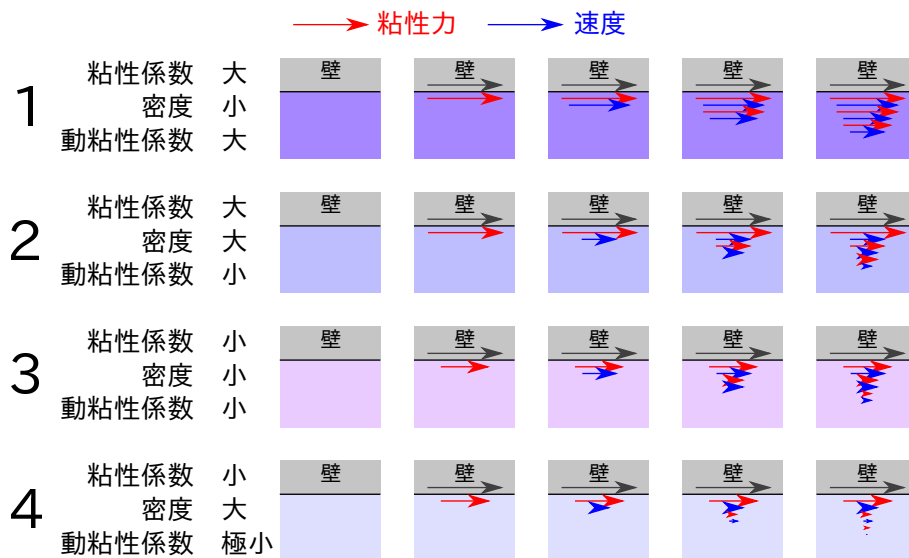


図 2 粘性係数、密度、動粘性係数

4 具体例

空気と水の粘性係数、密度、動粘性係数の具体的な値（常圧、26.85°C(300K)）を表1に示す（引用元：熱物性ハンドブック、日本熱物性学会、養賢堂、2008年）。表1のように水は空気に比べ粘性係数は高いが、動粘性係数は空気が高い。すなわち粘性力は水の方が伝えやすいが、空気のほうが簡単に遠くの流体まで動かすことができる。

表1 空気と水の物性値

| 物質 | 粘性係数 / ($\mu\text{Pa s}$) | 密度 / (kg/m^3) | 動粘性係数 / (mm^2/s) |
|----|-----------------------------|--------------------------|------------------------------------|
| 空気 | 18.57 | 1.176 | 15.79 |
| 水 | 853.8 | 996.56 | 0.857 |

5 熱伝導率と熱拡散率

熱伝導率と熱拡散率（温度伝導率）も同じ関係で、熱の拡散と温度の拡散をそれぞれ表している。伝わった熱によってどれくらい温度が変化するかは、体積あたり単位温度上げるのに必要なエネルギーで熱を割ればよい。体積あたりの単位温度上げるのに必要なエネルギーは比熱に密度をかけると求められる。このことから熱伝導率 k （単位： W/m K ）を比熱 c_p （単位： J/K kg ）と密度 ρ （単位： kg/m^3 ）で割ると熱拡散率 a （単位： m^2/s ）になる。

$$a = \frac{k}{\rho c_p}$$

運動量（エネルギー）が力（熱）として伝わる（拡散する）。運動量（エネルギー）の拡散は速度（温度）の勾配があると力（熱）として伝わる。その力（熱）の伝わる大きさが物質により違い、粘性係数（熱伝導率）として表される。拡散は速度（温度）勾配によって起こるため、速度場（温度場）へ拡散が与える影響は速度（温度）の変化を表す動粘性係数（熱拡散率）として表される。直接測定することのできない力や熱が伝わった（拡散した）結果、測定できる速度や温度が変化する。この測定できる速度と温度の拡散は同じ単位 m^2/s で表される。

6 単位

前述のとおり動粘性係数 ν （単位： m^2/s ）は次のように定義される。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

しかし、この定義の式のみでは物理的な意味がわかりにくい。流体に作用する力と速度の関係から動粘性係数の単位 m^2/s の意味を考えていく。

一定質量 m （単位： kg ）の流体の運動量の時間変化はニュートンの第二法則より慣性力 $F_{\text{慣}}$ （単位： N ）と呼ばれ、速度 u （単位： m/s ）との関係は次式の様に表される。

$$F_{\text{慣}} = \frac{\partial mu}{\partial t}$$

流体の質量 m (単位: kg) は流体の平均密度 ρ (単位: kg/m³)、流体の体積 V (単位: m³) より $m = \rho V$ と表すことが出来る。ここで密度 ρ (単位: kg/m³) は一定である場合を考える。密度が一定であれば、一定質量の流体の体積も一定であるため次式となる。

$$\begin{aligned} F_{慣} &= \frac{\partial \rho V u}{\partial t} \\ &= \rho V \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

流体の粘性により働く力(次式では剪断応力 τ (単位: Pa)) は流体に剪断変形 γ (単位: m/s) によって生じる。

$$\tau = \mu \gamma$$

ここでは考えやすいように x 方向、 y 方向の二次元の流れとし、 x 方向の速度 u (単位: m/s) が進行方向と直行する y 方向に変化する際に働く粘性力 $F_{粘}$ (単位: N) のみを考える。 y と直行する面(面積 A (単位: m²)) に対して平行な x 方向に力が次式の様に働く。

$$\frac{F_{粘}}{A} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

式(2)と式(3)より速度 u の y 方向の勾配が大きいと大きな粘性力が働き、その力の大きさに応じて流体の速度が変化することが分かる。この関係について図3に示すようにある領域を通過する流体で運動量の式を立ててみると動粘性係数 ν の(単位: m²/s)の意味が見えてくる。 x 方向、 y 方向に極微少な幅 dx 、 dy を持つ直方体を検査体積として考える。 x 、 y の二次元の流れであるが z 方向には計算上 l_z の長さを持つとする。この検査体積に働く力は y 方向に垂直な二つの面に働く粘性力であり、その力により流体の運動量が変化する。二つの面に働く粘性力 F_{y1} 、 F_{y2} をそれぞれ求める。粘性力の作用する面の面積 A (単位: m²) は $dx l_z$ で表されるので、式(3)の A へ代入し右辺に移項する。 $y1$ 面に働く力 F_{y1} (単位: N) は次のように表される。

$$F_{y1} = \mu l_z dx \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y1}$$

$y2$ 面に働く力 F_{y2} (単位: N) は次のように表される。

$$F_{y2} = \mu l_z dx \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y2}$$

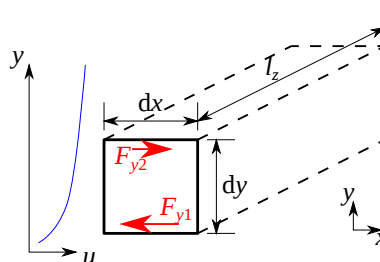


図3 慣性力と粘性力の釣り合い

上下面では速度勾配に対して検査体積に働く粘性力の向きが逆になるので、検査体積全体に働く粘性力は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 -F_{y_1} + F_{y_2} &= -\mu l_z dx \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} + \mu l_z dx \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_2} \\
 &= \mu l_z dx \left(- \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_2} \right) \tag{4}
 \end{aligned}$$

ここで y_1 面と y_2 面での速度勾配 $\partial u / \partial y$ の関係を考える。 y_1 面を基準とすると y_2 面での値は、(y_1 の値) + (y_1 での勾配) × (y_1 面と y_2 面の幅) で表すことができるので、式で表し次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_2} &= \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} + \frac{\partial}{\partial y} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} dy \\
 &= \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1} dy
 \end{aligned}$$

式 (4) へ代入する。ここで dy との積の項は差が十分に小さいため $|_{y_1}$ を外す。

$$\begin{aligned}
 -F_{y_1} + F_{y_2} &= \mu l_z dx \left(- \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y_1} + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1} dy \right) \\
 &= \mu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1} l_z dx dy \tag{5}
 \end{aligned}$$

上式のように作用する粘性力の大きさは速度勾配の勾配に比例する。式 (5) で表される粘性力が式 (2) の慣性力と釣り合う。式 (2) 中の体積 V (単位: m^3) は $l_z dx dy$ で表すことができる。

$$\begin{aligned}
 F_{\text{慣}} &= -F_{y_1} + F_{y_2} \\
 \rho l_z dx dy \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1} l_z dx dy \\
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1} \\
 \frac{\mu}{\rho} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1}} \\
 \nu &= \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y_1}}
 \end{aligned}$$

右辺は速度の時間変化率と速度勾配の勾配の比であり、動粘性係数 ν は速度勾配の変化に対して速度がどれくらい変化しやすいかを表す値であることが分かる。右辺の単位を考えると、分子分母共に偏微分の対象は速度であるため消え t と y^2 が残り、 $(1/\text{s}) / (1/\text{m}^2) = \text{m}^2/\text{s}$ となる。

動粘性係数のように拡散を表す係数は他に熱拡散率や物質拡散率があり、その全ての単位は m^2/s である。これはどの値も拡散のしやすさを拡散対象量の時間変化率 ($1/\text{s}$) と勾配の勾配 ($1/\text{m}^2$) の比で表しているからである。

この図を含む文章の著作権は椿耕太郎にあり、クリエイティブ・コモンズ 表示 - 非営利 - 改変禁止 4.0 国際 ライセンスの下に公開する (ライセンスの詳細 <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.jp>)。最新版は <http://camellia.thyme.jp> で公開している。